Properties of Derivatives :-

if (f) and (g) are differentiable function of(x)

and (c) is any constant.

[redacted]

1). $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2). $\frac{d}{dx}\left(f(x) \mp g(x)\right) =$ [redacted] $= f(x)' \mp g(x)'$

3). $\frac{d}{dx} \cdot c\, f(x) = c\, f(x)'$

4). $\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f(x) \cdot g(x)' + f(x)' \cdot g(x)$

5). $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \cdot f(x)' - f(x) \cdot g(x)'}{[g(x)]^2}$

6). $\frac{d}{dx}(x)^n = n x^{n-1}$ n:- is any real number.

7). $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$

8). $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

9). $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

10). $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

11). $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$

12). $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x$

13). $\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} * f'(x)$

مشتقة الدوال المثلثية تساوي

مشتقة الدالة المثلثية = (مشتقة نفس الدالة) × (مشتقة الزاوية)

Ex :- 1

$y = \sin(x)^3$

$y' = \cos(x)^3 \times 3x^2$

Ex :- 2

$y = x^2 +$ [redacted]

$y' = 2x^1$

Ex :- 3

$y = x^{10}$

$y' = 10x^9$

Ex :- 4

$y = \sqrt{x}$

$y' = x^{1/2}$

$y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ex :- 5

$y = 12x^3$ [redacted]

$y' = 36x^2$

Ex :- (6)

$$y = 2x^4 + 5x^2 + x + 19$$

$$y' = 8x^3 + 10x + 1$$

Ex :- (7)


[redacted]

$$y = \frac{3}{x}$$

$$y' = \frac{x * 0 - 3 * 1}{x^2}$$

$$y' = \frac{-3}{x^2}$$

Ex :- (8)

$$y = x^2 \, (x^3 + 2)$$

$$y' = x^2 \, (3x^2) + 2x \, (x^3 + 2)$$

$$y' = 3x^4 + 2x^4 + 4x$$

$$y' = 5x^4 + 4x$$

Ex :- (13)

$$y = \cos(x^3+1)$$

$$y' = -\sin(x^3+1) * 3x^2$$

Ex :- (14)

$$y = [redacted] \left(\frac{x}{x+1}\right)$$

[redacted]

$$y = \cot \frac{x}{x+1}$$

$$y' = -\csc^2\left(\frac{x}{x+1}\right) * \frac{(x+1) - x(1)}{(x+1)^2}$$

$$= -\csc^2\left(\frac{x}{x+1}\right) * \frac{1}{(x+1)^2}$$

Ex :- (15)

$$y = \tan(x^3+x)$$

(*)

$$y' = \sec^2(x^3+x) * (3x^2+1)$$

Ex :- (16)

$$y = \sec\left(\frac{3x+7}{5}\right)$$

$$y' = \sec\left(\frac{3x+7}{5}\right) * \tan\left(\frac{3x+7}{5}\right) * \frac{3}{5}$$

$y = (\sin x^3)^2 = \sin^2 x^3$ ⑥

$y' = 2 \sin x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2$

$y = \cot^4 (x^2 + x) * x^3$

$= [\cot^4 (x^2+x) \cdot 3x^2] + [x^3 \cdot 4 \cot^3 (x^2+x) * -\csc^2 (x^2+x)$
$* \; 2x+1)]$

$y = \tan (x^2 + x)$

$y' = \sec^2 (x^2 + x)(2x+1)$

$y = \cos (x^2+1)$

$y' = -\sin (x^2+1)(2x)$

$y = \dfrac{x}{\sin^2 x^3}$

$y' = \dfrac{\sin^2 x^3 * 1 - x * 2 \sin(x^3) (\cos x^3)(3x^2)}{[\sin^2 x^3]^2}$

$= \dfrac{\sin^2 x^3 - 6x^3 \sin x^3 \cos x^3}{\sin^4 x^3} \longrightarrow$ أكمل
اكمل

High order derivative

7 [redacted]

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

المشتقة الثانية هي مشتقة المشتقة الاولى
والمشتقة الثالثة هي مشتقة المشتقة الثانية
والمشتقة الرابعة هي مشتقة المشتقة الثالثة، وهكذا ــــ

Ex find $\frac{d^4 y}{dx^4}$ or y'''' if $y = x^6 - 3x^4 + \cos x$

$$y' = 6x^5 - 12x^3 + (-\sin x)$$

$$y'' = 30x^4 - 36x^2 - \cos x$$

$$y''' = 120x^3 - 72x + \sin x$$

$$y'''' = 360x^2 - 72 + \cos x$$

8 [redacted]

Ex:- IF $x^3y + x^2y = 2$

Find $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ when $x = 1$

Sol. when $x = 1$

$\Rightarrow (1)^3y + (1)^2y = 2$

$2y = 2 \qquad \therefore y = 1$

$x^3y' + y * 3x^2 + x^2y' + y * 2x = 0$

$y'(x^3 + x^2) = -3yx^2 - 2yx$

$$y' = \frac{-(3yx^2 + 2yx)}{x^3 + x^2}$$

[redacted]

$$y' = \frac{-(3 * (1)^2 + 2(1)(1))}{(1)^3 + (1)^2} = -\frac{5}{2}$$

$x^3y'' + y' * 3x^2 + y * 6x + 3x^2y' + x^2y'' + y' * 2x + y * 2 + 2xy' = 0$

$$y'' = \frac{-3y'x^2 - 6yx - 3x^2y' - 2xy' - 2y - 2xy'}{x^3 + x^2}$$

$$y'' = \frac{-(3 * \frac{-5}{2}(1)^2 + 6(1)(1) + 3(1)^2 * -\frac{5}{2} + 2(1)\frac{-5}{2} + 2(1) + \quad * \frac{-5}{2})}{(1)^3 + (1)^2}$$

$y'' = 16.5$

Chain Rule

قاعدة السلسلة

① if $y = f(x)$ and $x = g(t)$ then :-

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} * \frac{dx}{dt}$$

② if $y = f(t)$ and $x = g(t)$ then :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$(y')(f'(x))$

Ex ① if $y = \sin t$ $\quad x = \cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$\frac{dy}{dt}$ مشتقة y بالنسبة ل t $= \cos t$

$\frac{dx}{dt} =$ t مشتقة x بالنسبة ل $= -\sin t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$$

$$\frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Ex ② find $\frac{dy}{dx}$ if $y=t^3$ and $t=x^2+2$

$$\frac{dy}{dt}=3t^2 \quad , \quad \frac{dt}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}*\frac{dt}{dx}$$

$$=3t^2*2x$$

$$=6t^2x$$

$$=6(x^2+2)^2.x \qquad t=x^2+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=6(x^2+2)^2.x$$

تعويض $t=x^2+2$ لغرض جعل الناتج كله بدلالة X

Ex ③ find dw/dt if $W=\tan x$ and $x=4t^3+t$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{\cancel{dx}}*\frac{\cancel{dx}}{dt}$$

$$=(\sec^2x)(12t^2+1)$$

$$=(12t^2+1)(\sec^2(4t^3+t)) \rightarrow X$$

Ex (4) Find $\frac{dy}{dx}$ and $\frac{dy^2}{dx^2}$ if $y = (t^2+1)^4$, $x = t^2+5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{\cancel{dt}} * \frac{\cancel{dt}}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$\boxed{\frac{dy}{dt} * \frac{dx}{dt} \quad X}$
-بحال يكون dx في المقام

$$\frac{dy}{dt} = 4(t^2+1)^3 (2t)$$ مشتقة y بالنسبة الى t

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 0 = 2t$$ مشتقة x بالنسبة الى t

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4(t^2+1)^3 \cdot \cancel{2t}}{\cancel{2t}} = 4(t^2+1)^3$$

المشتقة الثانية y'' او $\frac{dy^2}{dx^2}$ او $f''(x)$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) * \frac{dt}{dt}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{مشتقة المشتقة الاولى}} \cdot \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\text{مقلوب}}$$

$\frac{d}{dt}\{4(t^2+1)^3$

$dx/dt = dt/dx = \frac{1}{2t}$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 12(t^2+1)^2 (\cancel{2t}) * \frac{1}{\cancel{2t}}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = y'' = 12(t^2+1)^2$$

Ex ⑤ if $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$, $x = -\cos^3\theta$ } find $\frac{dy^2}{dx^2}$

Sol:- $\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta . \cos\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta(-\sin\theta) = 3\cos^2\theta . \sin\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{dy}{d\theta} * \frac{d\theta}{dx} = \frac{3\cos\theta - 3\sin^2\theta . \cos\theta}{3\cos^2\theta . \sin\theta}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$= \frac{\cancel{3\cos\theta}(1-\sin^2\theta)}{\cancel{3}\cos^{\cancel{2}}\theta . \sin\theta}$ $\cos\theta$ $= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta . \sin\theta} = \frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\cos\theta} . \sin\theta}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$

$= -\csc^2\theta * \frac{1}{3\cos^2\theta . \sin\theta}$

Ex 6 Use chain rule to find $\frac{dy}{dx}$ if

$$y = \frac{1}{t^2+1}, \quad t = \sqrt{4x-1}$$

$$y = (t^2+1)^{-1} \longrightarrow \frac{dy}{dt} = -1(t^2+1)^{-2}(2t) = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$$

$$t = \sqrt{4x-1} = (4x-1)^{1/2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(4x-1)^{-1/2}(4) = \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$$

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{\cancel{dt}} * \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} =$$

$$\frac{-2t}{(t^2+1)^2} * \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$$

$$\because t = \sqrt{4x-1} \Longrightarrow t^2 = 4x-1 \rightarrow x = \frac{t^2+1}{4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{4\left(\frac{t^2+1}{4}\right)-1}} * \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{\cancel{4}(t^2+1)}{\cancel{4}}-1}} * \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$$

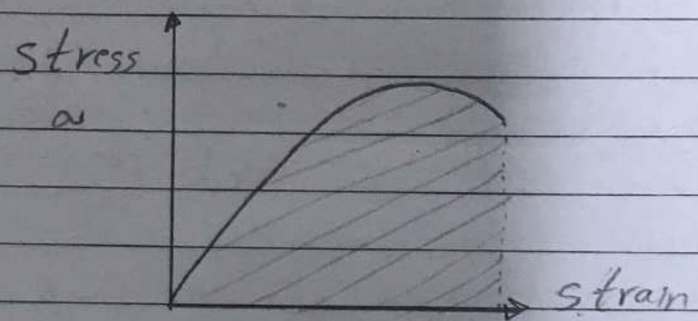
$$\frac{2}{\sqrt{t^2+\cancel{1}-\cancel{1}}} * \frac{-2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2}{\cancel{t}} * \frac{-2\cancel{t}}{(t^2+1)^2} = \frac{-4}{(t^2+1)^2}$$

المحاضرة الثالثة

التكامل Integration

التكامل له معاني اثنان :

① ايجاد المجموع او الكمية لشيء ما ويتمثل هذا رياضيا بايجاد حجوم المواد المختلفة وحساب الأطوال للمنحنيات وحساب مراكز الجاذبية للاجسام وايجاد المساحة المحاطة بالمنحنيات مثلا المساحة المؤثرة تحت منحنى الاجهاد stress والانفعال strain تمثل المتانة Toughness وهي قدرة المادة على مقاومة الاحمال الديناميكية دون كسر اي قدرتها على امتصاص الطاقة ، ايجاد هذه المساحة يتم بالتكامل .



② ايجاد الدالة التي تكون مشتقتها معطاة (موجودة)

---

① التكاملات غير المحددة

① $\int dx = x + C$

② $\int (f(x) \mp g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \mp \int g(x)\, dx$

③ $\int K \cdot f(x)\, dx = K \int f(x)\, dx$ K is any Constant

④ $\int x\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

⑤ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln |x| + c$

C is Constant

Ex Evaluate the following integrals

① $\int dx = x + c$

② $\int (x^2 + x)\, dx$

$= \int x^2\, dx + \int x\, dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

③ $\int 4x\, dx$

$= 4 \int x\, dx$

$= 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$

$= 2x^2 + C$

④ $\int (3x^2 + 2x + 3)\, dx$

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x + c$

$= x^3 + x^2 + 3x + C$

③

⑤ $\int \frac{dx}{x^5}$

$= x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4}$

$= \frac{x^{-4}}{-4} + C$

$= \frac{-1}{4x^4} + C$

---

⑥ $\int \left(\frac{x^2+x}{7}\right) dx$

$\int \frac{x^2}{7}\,dx + \int \frac{x}{7}\,dx$

$= \frac{x^3}{21} + \frac{x^2}{14} + C$

---

⑦ $\int (1+x^3)^2$

$= \int (1+2x^3+x^6)\,dx$ ربع الاول + ٢ * الاول * الثاني + مربع الثاني

$= x + \frac{2x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C$

ملاحظة/ الامثلة السابقة حل التكامل فيها مباشر، بسيط اما تكامل القوس فيجب ان تتوفر مشتقة داخل القوس لغرض التكامل

مثلاً:

(8) $\int (x^3+3x)(x^2+1)\,dx$

لا يمكن حل هذا التكامل مباشرةً كما في الامثلة السابقة، حل تكامل (x^3+3x) يمكن اذا توفرت مشتقة داخل القوس، مشتقة داخل القوس هي $3x^2+3$ بينما خارج القوس لدينا (x^2+1) يجب ان نحول الى $3x^2+3$ ثم نجري عملية التكامل لـ (x^3+3x)، التحويل الى $3x^2+3$ بقسمة وضرب المقدار على 3

$$\int (x^3+3x)(x^2+1)\,dx \ast \frac{3}{3}$$

$$\frac{1}{3}\int (x^3+3x)(3x^2+3)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+3x)^{1+1}}{1+1} = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+3x)^2}{2} + C$$

(9) $\int \frac{3r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int (1-r^2)^{-\frac{1}{2}}(3r)\,dr$

لاجراء عملية تكامل $\int (1-r^2)^{\frac{1}{2}}$ نحتاج مشتقة داخل القوس وهي $(0-2r)=-2r$ لدينا خارج القوس $3r \rightarrow 3$ خارج التكامل كثابت يبقى r اي نحتاج ال ضرب، تقسيم على -2

$$\int (1-r^2)^{-\frac{1}{2}}\,3r\,dr \ast \frac{-2}{-2}$$

- بالبسط نضرب في r لتحقيق شرط التكامل
- بالمقام نخرج كثابت خارج التكامل مع 3

$$\frac{-3}{2}\int (1-r^2)^{-\frac{1}{2}}(-2r)\,dr \Rightarrow -\frac{3}{2}\,\frac{(1-r^2)^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} + C$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \Rightarrow -\frac{3}{2} \ast \frac{2}{1}\,(1-r^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -3\sqrt{1-r^2} + C$$

Integration of trigonometric functions:-

1. $\int \cos u \, du = \sin u + c$

2. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$

3. $\int \sec^2 u . du = \tan u + c$

4. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$

5. $\int \sec u . \tan u \, du = \sec u + c$

6. $\int \csc u . \cot u = -\csc u + c$

7. $\int \tan u . du = \int \frac{\sin u}{\cos u} du * \frac{-1}{-1} = -\text{Lin}|\cos u| + c$

8. $\int \cot u \, du = \int \frac{\cos u}{\sin u} du$

$$= \text{Lin}|\sin u| + c$$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

9. $\int \sec u \, du = \text{Lin}|\sec u + \tan u| + c$

10. $\int \csc u \, du = -\text{Lin}|\csc u + \cot u| + c$

or

$$= \text{Lin}|\csc u - \cot u| + c$$

(6)

Ex Evaluate

① $\int \cos 3x \, dx \qquad * \frac{3}{3}$

$= \frac{1}{3}\int \cos(3x)(3)\, dx$

$= \frac{1}{3} \sin 3x + C$

② $\int \sin 7x \, dx$

$= \frac{1}{7}\int \sin(7x)(7)\, dx$

$= -\frac{1}{7} \cos 7x + C$

③ $\int \sec^2(x+3)\, dx$

$= \tan(x+3) + C$

④ $\int 2(\sin x)^1 \cos x \, dx$

$= \cancel{2} \frac{\sin^2 x}{\cancel{2}} + c \qquad$ or $\qquad 2\frac{(\sin x)^{1+1}}{1+1} + c$

$= \sin^2 x + c \qquad\qquad \cancel{2}\frac{(\sin x)^2}{\cancel{2}} + C$

$(\sin x)^2 + c$

ملاحظة/

① في تكامل الدوال المثلثية يجب توفير مشتقة الزاوية لحل التكامل كما في مثال ① و ② و ③

② في تكامل الدوال المثلثية التي تحتوي على قوس يجب توفير مشتقة داخل القوس ومشتقة الزاوية كما في مثال ④ و ⑤

⑤ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} \, dx$

$= \int \frac{\cos 2x}{(\sin 2x)^3} \, dx$

$= \int (\sin 2x)^{-3} (\cos 2x) \, dx \qquad * \frac{2}{2}$

$= \frac{1}{2} \frac{(\sin 2x)^{-3+1}}{-3+1} + C$

$= \frac{1}{2} \frac{(\sin 2x)^{-2}}{-2} + C$

$= \frac{-1}{4 \sin^2 2x + C}$

6 $\int \cos^3(3x)\,dx$

$= \int \cos^2(3x) \cdot \cos(3x)\,dx$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$= \int (1 - \sin^2 3x) \cdot \cos(3x)\,dx$

$= \int (\cos 3x - \cos 3x \sin^2 3x)\,dx$

$= \int \cos 3x\,dx - \int \sin^2 3x \cos 3x\,dx$

$= \left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) - \left(\frac{1}{3} \frac{\sin^3 3x}{3}\right) + C$

$= \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{\sin^3 3x}{9} + C$

المحاضرة الرابعة

(7) $\int \sqrt{1-\cos x}\ dx$

$$= \int \sqrt{1-\cos x}\ dx * \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}}{\sqrt{(1+\cos x)}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1-\cos^2 x = \sin^2 x$

$(\sin^2 x)^{1/2} = \sin x^{\frac{2}{2}} = \sin x$

$$= \int \frac{\sin x\ dx}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \int (1+\cos x)^{\frac{-1}{2}} (\sin x)\ dx \quad * \frac{-1}{-1}$$

$$= -\frac{(1+\cos x)^{\overset{n+1}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)}}}{\underset{n+1}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)}} = -\frac{1+\cos x^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= -2\sqrt{1+\cos x} + C$$

②

⑧ $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$

$= \int \sin x . (\cos x)^{-3} \, dx \quad * \frac{-1}{-1}$

$= -\frac{\cos x^{-2}}{-2} + C$

$= \frac{1}{2 \cos^2 x} + C$

---

⑨ $\int \frac{x}{x+1} \, dx$

$= \int \frac{x+1-1}{x+1} \, dx$

$= \int \frac{x+1}{x+1} dx - \int \frac{dx}{x+1}$

$= \int dx - \int \frac{dx}{x+1}$

$= x - \ln |x+1| + c$

$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$

③

(10) $\int \frac{dx}{(2x+2)^2}$

$= \int (2x+2)^{-2}\, dx$

$= \int (2x+2)^{-2} * \frac{2}{2}\, dx$

$= 2\,\frac{(2x+2)^{-2+1}}{-2+1} + C = 2\,\frac{(2x+2)^{-1}}{-1} + C$

$= -\frac{1}{2}\,(2x+2)^{-1} + C$

$= -\frac{1}{2(2x+2)^1} + C$

$= \frac{1}{-4x+4} + C$

11 $\int \frac{dx}{9x^2+12x+4}$

$$= \int \frac{dx}{(3x+2)(3x+2)}$$

$$= \int \frac{dx}{(3x+2)^2}$$

$$= \int (3x+2)^{-2}\, dx \ast \frac{3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\ \frac{(3x+2)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-1}{3(3x+2)} + C$$

$$= \frac{-1}{9x+6} + C$$

(12) $\int \sqrt{\cot x} \cdot \csc^2 x \, dx$ (5)

$$= \int (\cot x)^{1/2} (\csc^2 x \, dx$$

$$= \int \cot x^{1/2} \csc^2 x \, dx * \frac{-1}{-1}$$

$$= -\frac{\cot x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= -\frac{2 \cot x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= -\frac{2\sqrt{\cot^3 x}}{3} + C$$

(13) $\int \frac{\sec^2 x \, dx}{(2+3\tan x)^4}$

$$= \int (2+3\tan x)^{-4} (\sec^2 x) \, dx$$

$$= \int (2+3\tan x)^{-4} (\sec^2 x) \, dx * \frac{3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} * \frac{(2+3\tan x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{9(2+3\tan x)^3} + C$$

14 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

الدالة التي في المقام يجب ان يكون مشتقتها موجودة في البسط

مشتقة $1+\sqrt{x} \leftarrow = 0 + \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ بينما البسط

$= \frac{1}{\sqrt{x}}$ لذلك نضرب ونقسم البسط على 2 لكي تتم عملية التكامل

$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{2}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\ln|1+\sqrt{x}| + c$$

(7)

(15) $\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\, dx$

$= \int \csc^2 2x + \int \cos 2x * \sin^{-2} 2x \, dx$

$= \int \csc^2 2x * \frac{\text{[redacted]}2}{\text{[redacted]}2}\, dx + \int (\sin 2x)^{-2} \cos 2x * \frac{2}{2}\, dx$

$= -\frac{1}{2}\cot 2x + \frac{1}{2}\frac{(\sin 2x)^{-1}}{-1} + C$

$= -\frac{\cot 2x}{2} - \frac{1}{2\sin 2x} + C$

$= -\frac{\cot 2x}{2} - \frac{\csc 2x}{2} + C$

8

(16) $\int \sec^3 2x \tan 2x \, dx$

$$= \int \underbrace{\sec^2 2x \cdot \sec 2x}_{\sec^3 2x} \cdot \tan 2x \, dx$$

$$= \int (\sec 2x)^2 \cdot \sec 2x \cdot \tan 2x \, dx$$

لإجراء عملية تكامل $(\sec 2x)^2$ نحتاج مشتقة الدالة المرفوعة وهي
$\sec 2x \cdot \tan 2x$ (موجودة خارج القوس) ومشتقة التي بعدها المشتقة
الزاوية $(2x)$ غير موجودة وتساوي (2) لذلك نضرب ونقسم على 2

$$= \int (\sec 2x)^2 \cdot (\sec 2x \cdot \tan 2x) * \frac{2}{2} \, dx$$

2 التي في البسط تكمل شرط التكامل
2 في المقام $= \frac{1}{2}$ تخرج خارج التكامل كثابت

$$= \frac{1}{2} \int (\sec 2x)^2 (\sec 2x \cdot \tan 2x)(2) \, dx$$

$$= \frac{1 * (\sec 2x)^3}{2 * 3} + C$$

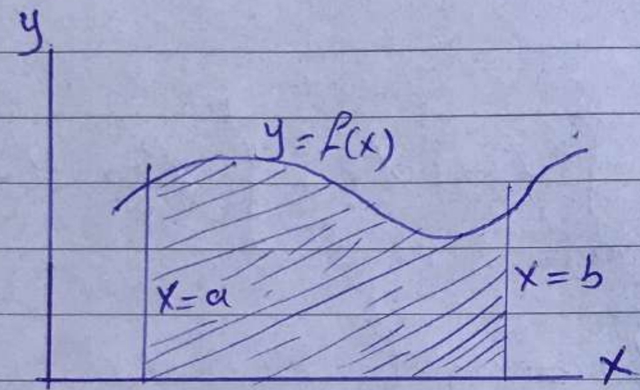
المحاضرة الخامسة

Definite integral التكامل المحدد

لتكن الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فان التكامل المحدد يعرف

$\int_a^b f(x)dx$ بانه المساحة الواقعة تحت المنحني $f(x)$ وفوق المحور السيني

والمحددة بالمستقيمين المتوازيين $x=a$ ، $x=b$ كما موضح في الشكل ادناه،



وتحسب المساحة كالاتي

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث $F(x)$ هو تكامل الدالة $f(x)$

Where a is called the Lower bound
b is called the upper bound

Properties of definite integrals

خواص التكامل المحدد

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ ex $\int_3^3 \frac{x^3-3x^2-2}{\cos x^3}\,dx = 0$

2. $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)\,dx$ ex $\int_1^3 2x\,dx = -\int_3^1 2x\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4. $\int_a^b K f(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$

5. $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,dx = \int_a^b f(x) \mp \int_a^b g(x)\,dx$

Ex Evaluate the integral

1. $\int_{-1}^{1} (2x^2 - x^3)\,dx = 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{1}$

$= \left[\frac{2}{3}(1)^3 - \frac{1}{4}(1)^4\right] - \left[\frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{(-1)^4}{4}\right] = \frac{4}{3}$

③

② $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin x \, dx$

$= \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} = -\cos\frac{3\pi}{4} - \left[-\cos\frac{\pi}{2}\right]$

$= -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

---

③ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{3/4\pi} x \, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$

$= 0.5\left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 - 0.5\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1.542$

---

④ $\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,.\,du = \int_1^4 (u^{1/2} - u^{3/2})\,du$

$= \left.\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2}\right]_1^4$

$= \left[\frac{2}{3}(4)^{3/2} - \frac{2}{5}(4)^{5/2}\right] - \left[\frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{2}{5}(1)^{5/2}\right] = -7.733$

⑤ $\int_{-2}^{3} |x-1|\,dx$

④ $x-1 = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$

$= \int_{1}^{3} (x-1)\,dx$

$-2 \quad 1 \quad 3$

$x \geq 1$

$\int_1^3$

$= \left. \frac{x^2}{2} - x \right]_1^3$

$= \left[\left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = 2$

$\int_{-2}^{1} (-x+1)\,dx$

$-2 \quad 1 \quad 3$

$x < 1$

$= \left. \frac{-x^2}{2} + x \right]_{-2}^{1}$

$= \left[\left(\frac{-1}{2} + 1 - \left(\frac{-(-2)^2}{2} + (-2)\right)\right]\right.$

$= 4.5$

$\int_{-2}^{3} \quad = \quad \int_{1}^{3} \quad \int_{-2}^{1}$

$\int_{\cancel{1}}^{3} \quad \int_{-2}^{\cancel{1}}$

(5)

(6) $\int_{-4}^{4} |x|\,dx$

$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$\int_{0}^{4} x\,dx$

$-4 \quad 0 \quad 4$

$\int_{0}^{4}$

$x \geq 0$

$= \frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8$

$\int_{-4}^{0} -x\,dx = \frac{-x^2}{2}\Big]_{-4}^{0}$

$-4 \quad 0 \quad 4$

$x < 0$

$\int_{-4}^{0}$

$= -\left(\frac{0}{2} - \frac{(-4)^2}{2}\right)$

$= 8$

$\int_{-4}^{4}$

$\int_{0}^{4}$

$\int_{-4}^{0}$

$\int_{\cancel{0}}^{4}$

$\int_{-4}^{\cancel{0}}$

⑥

⑦ $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^{-2} x}\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 \cos x \, dx = \left.\frac{(\sin x)^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^3 - \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = 0.215\right.$$

---

⑧ $$\int_0^1 \sqrt{5x+4}$$

$$= \int_0^1 (5x+4)^{1/2}$$

تكامل المقدار يحتاج مشتقة داخل القوس
مشتقة داخل القوس = 5 لذلك نضرب ونقسم على 5

$$= \int_0^1 (5x+4)^{1/2} * \frac{5}{5}$$

$$= \left[\frac{1}{5} \frac{(5x+4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{15}\left[(5*1+4)^{3/2} - (5*0+4)^{3/2}\right]$$

صح

$$= \frac{2}{15}(27-8) = \frac{38}{15}$$

①

المحاضرة السادسة

Transcendental functions الدوال المتسامية

Logarithms

اللوغاريتمات

Kinds of Logarithms functions:-

① Natural Logarithms functions لوغاريتم للاساس الطبيعي

$\log_e m = x \longrightarrow m = e^x$

where e is real number ($e = 2.718$)

Note, $\ln = \log_e$ هي الصيغة العامة لكتابة $\log_e$

$\therefore \log_e m = x \longrightarrow \ln m = x$

② Common Logarithms functions لوغاريتم للاساس المشترك

$\log_{10} m = x \longrightarrow m = 10^x$

$\log_{10} m = x$ shall be always written as $\log m = x$

$\log_{10} m = \log m = x$

(3) General Logarithms functions: لوغاريتم للاساس العام

$$\log_a m = x \longrightarrow m = a^x$$

Where a is any Positive number different from 1.

Properties of Logarithms functions:-

(1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(3) $\log_a x^n = n \log_a x$

(4) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

for example $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

3

5. $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

6. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

7. $\ln x^{n} = n \ln x$

8. $\log_{e} e = 1 \longrightarrow \ln e = 1$

$e = e^{1}$ $\qquad \log_{e} = \ln$

Examples

1. $\ln x + \ln 7 = \ln(x * 7)$ معكوس ملاحظة 5
2. $\ln 9x = \ln 9 + \ln x$ ملاحظة 5
3. $\ln x - \ln 3 = \ln \frac{x}{3}$ معكوس ملاحظة 6
4. $\ln \frac{x}{5} = \ln x - \ln 5$
5. $\ln \sin^{2} x = 2 \ln \sin x$

Ex show that

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Sol

Let $y = \log_a x \longrightarrow x = a^y$

$\log_a m = x$

$y = \log_a x \longleftarrow x = \log_a m$

$x = a^y \longleftarrow m = a^x$

$x = a^y$ نأخذ ln للطرفين

$\ln x = \ln a^y$

$\ln x = y \ln a \longrightarrow y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

but $y = \log_a x$

$$\therefore \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

5

Logarithimic Differentiation

if $y = \log_a f(x) \longrightarrow \therefore y = \frac{\ln f(x)}{\ln a}$ $\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\quad f(x)$

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

or

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Examples

find dy/dx for

① $y = \ln x^3 \longrightarrow y = 3 \ln x$

$y' = 3 \frac{1}{x} \cdot * 1 = \frac{3}{x}$ $\quad x = u \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{x}$

② $y = \log_5 (x^3 - x) \longrightarrow y = \frac{\ln (x^3 - x)}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5} \cdot \ln(x^3 - x)$

ثابت
1/ln5=0.621
$\ln 5 = 1.609$

$$y' = \frac{1}{\ln 5} \frac{1}{(x^3 - x)} * (3x^2 - 1)$$

3) $y = \ln(\ln \sin x)$ $\qquad \ln \sin x = u$

$\frac{1}{u} \cdot du = \ln u$ مشتقة

$$y' = \frac{1}{\ln \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$u = \sin x$

$$y' = \frac{1}{\ln \sin x} * \frac{\cos x}{\sin x}$$

---

4) $y = x^{\cos x}$

أخذ ln الطرفين

$$\ln y = \ln x^{\cos x}$$

$$\ln y = \cos x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 + \ln x(-\sin x)(1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x$$

$$y' = y\left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right)$$

$$y' = x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right]$$

7

Ex 5 find dy/dx for

$$y = x^{x^2}$$

$$\ln y = \ln x^{x^2} \rightarrow \ln y = x^2 \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = x^2 \frac{1}{x} * 1 + \ln x * 2x \Rightarrow \frac{y'}{y} = x + 2x \ln x$$

$$y' = y [x + 2x \ln x]$$

$$y' = x^{x^2} [x + 2x \ln x]$$

Ex6 Prove

$$e^{\ln x} = x$$

Let $y = e^{\ln x}$ أخذنا ln الطرفين

$$\ln y = \ln e^{\ln x}$$

$$\ln y = \ln x . \ln e$$

$$\ln y = \ln x \quad \boxed{\ln e = 1}$$

$\therefore y = x$ $\quad \ln 2 = \ln 2 \rightarrow \therefore y = x$

$\ln 3 = \ln 3$ ....

but $y = e^{\ln x}$

$$\therefore e^{\ln x} = x$$

8

Ex 7 find y value if $\ln(y^2-1) - \ln(y+1) = \sin x$

$$\ln(y^2-1) - \ln(y+1) = \ln\frac{y^2-1}{y+1}$$

$\boxed{\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y}$

$$\therefore \ln\frac{y^2-1}{y+1} = \sin x$$

$$\ln\frac{(y-1)(y+1)}{y+1} = \sin x$$

$$\ln\frac{(y-1)\cancel{(y+1)}}{\cancel{(y+1)}} = \sin x$$

$$\ln y-1 = \sin x$$

ناخذ e للطرفين

$$e^{\ln(y-1)} = e^{\sin x}$$

e^x ← e مرفوعة للقوة x

e مرفوعة للقوة sinx

$$(y-1) = e^{\sin x} \longrightarrow \boxed{e^{\ln x} = x}$$

$$e^{\ln(y-1)} = y-1$$

$$\therefore y = e^{\sin x} + 1$$

①

المحاضرة السابعة

النوع الثاني من الدوال المتسامية Transcendental functions هي

الدوال الاسية exponential functions

تقسم الاسس الى ثلاثة انواع :

① $F(x)^a$, x^2 , x^3 , $(x+1)^5$

② $a^{f(x)}$, 2^x , 5^{x^2} , $10^{\ln x}$, $7^{\sin x}$

③ $f(x)^{f(x)}$, x^x , $x^{\cos x}$, $(x+1)^{1/x}$

Exponential functions e^x الدوال الاسية

(A) $y = e^x$ is called the exponential function where e is exponential number ($e = 2.718$) and x is any real number.

Properties of exponential function:-

1. $e^{x+x^2} = e^x \cdot e^{x^2}$

2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

3. $e^{\ln x} = x$

حاسبة علمية $e^1 = 2.718$

$1 \to 2nd\ f \to e^x = 2.718$

$2 \to 2nd\ f \to e^x = 7.38$ ↘ e^2

or

$2.718 \to y^x \to 2 = 7.38$

$2.718^2 = 7.38$

Examples:-

1. $e^{\ln(x^2-1)} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

2. $e^{\ln 3 + 2\ln x} = e^{\ln 3 + \ln x^2} = e^{\ln 3x^2} = 3x^2$

3. $\ln \frac{e^{3x}}{7} = \ln e^{3x} - \ln 7 = 3x \ln e - \ln 7 = 3x - \ln 7$

4. $\ln(x^3 \cdot e^{-4x}) = \ln x^3 + \ln e^{-4x} = 3\ln x - 4x \ln e$

$= 3\ln x - 4x$

(5) $e^{2x-\ln x} = e^{2x} \cdot e^{-\ln x} = e^{2x} \cdot e^{\ln x^{-1}} = e^{2x} \cdot x^{-1} = \frac{e^{2x}}{x}$

(6) $\ln \frac{1}{e^x} = \ln 1 - \ln e^x = 0 - x \cancel{\ln e}^{1} = -x$

Exponential function differentiation:- مشتقة الدوال الاسية

$$\text{If } y = e^{fx} \text{ then } \frac{dy}{dx} = \ln e . e^{f(x)} . f'(x)$$

$\ln e = \ln 2.718 = 0.999 \simeq 1$

Ex find dy/dx if $y = e^{\sin x} \rightarrow y' = e^{\sin x} . \cos x$

Integration of exponential function تكامل الدوال الاسية

$$\int e^u \left(\frac{du}{dx}\right) dx = e^u + C$$

(B) If $y = a^x$ where $a \neq 1$, $a > 0$ and x is any real NO.

$$\frac{d}{dx}\left(a^{f(x)}\right) = \ln a . a^{f(x)} . f'(x)$$

Ex find dy/dx $y = 2^{\csc x}$

$\frac{dy}{dx} = y' = \ln 2 * 2^{\csc x} * -\csc x . \cot x$

$$\int \ln a . a^{f(x)} . f'(x)\, dx = a^{f(x)} + C$$

or
التكامل عكس
الاشتقاق

4

Find dy/dx for

1. $y = xe^{x}$

$$y' = x \cdot e^{x} \cdot 1 + e^{x} = e^{x}(x+1)$$

2. $y = e^{2x} \ln 5x$

$$y' = e^{2x} \cdot \frac{1}{5x} * 5 + \ln 5x * e^{2x} * 2$$

Q Evaluate the following integrals

1. $\int (e^{x} + 2)\,dx = \int e^{x}\,dx + \int 2\,dx$

$\int e^{u} \frac{du}{dx} = e^{u} + c$ $\quad = e^{x} + 2x + C$

2. $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

3. $\int \frac{e^{2x}}{3e^{2x}+1}\,dx$ $\quad$ (تفاضل المقام) $= 6e^{2x}$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{6e^{2x}}{3e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{6} \ln |3e^{2x}+1| + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

5

(4) $$\int \frac{e^{x^2}.x}{e^{x^2}}\,dx$$

$$e^{x^2}.2x \quad = \text{مشتقة المقام}$$

$$\int \frac{e^{x^2}\cdot x}{e^{x^2}}\,dx * \frac{2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|e^{x^2}\right| + c$$

(5) $$\int \frac{e^{x}+e^{3x}}{e^{-x}}\,dx$$

$$= \int\left(\frac{e^{x}}{e^{-x}} + \frac{e^{3x}}{e^{-x}}\right)dx$$

$$= \int\left(e^{2x} + e^{4x}\right)dx$$

$$= \int e^{2x}\,dx + \int e^{4x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

Note: $\ln x^2 = 2\ln x$

but $\ln^2 x = (\ln x)^2$

Ex $\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$

$= \int (\ln x)^2 * \frac{1}{x}$

$= \frac{\ln^3 x}{3} + C$ or $\frac{(\ln x)^3}{3} + C$

$\int \frac{\ln (x-1)^{(x-3)}}{x^2 - 4x + 3}$

$= \int \frac{(x-3)\ln(x-1)}{(x-3)(x-1)}$

$-3x$
$-x$
$-4x$

x^2 $+3$

$= \int \frac{\ln(x-1)}{(x-1)}\, dx$

$= \int \ln(x-1)' * \frac{1}{x-1}$

$= \frac{\ln^2(x-1)}{2} + C$

Integration Methods:

① **Integration by parts**: when (u) and (V) are defferentiable function of (x) then:

$$d(uV) = u\,dv + V\,du$$

$$u\,dv = d(uV) - V\,du$$

$$\boxed{\int u\,dv = uV - \int V\,du}$$

Q: $\int x e^x dx$

let $u = e^x \rightarrow du = e^x dx$

let $dv = x\,dx \rightarrow V = \frac{x^2}{2}$

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

∵ التكامل الثاني أصعب من التكامل الاول اذن نغير الفرضية

∴ let $u = x \rightarrow du = dx$

let $dv = e^x dx \rightarrow V = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + C$$

Q: $\int x^2 \ln x \, dx$

لا توجد طريقة لايجاد $\int \ln x$
ولكن نعرف اشتقاقها لذلك
نأخذها هي ال u

$$\text{let } u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{let } dv = x^2 dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

Q: $\int \tan^{-1} x \, dx$

$\because \tan^{-1} x$ لا نعرف تكاملها ولكن
نعرف مشتقتها لذلك نفرضها
هي ال u

$$\text{let } u = \tan^{-1} x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{let } dv = dx \rightarrow v = x$$

$$\therefore \int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx * \frac{2}{2}$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

Q: $\int e^{3x} x^2 \, dx$

let $u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx$

let $dv = e^{3x} dx * \frac{3}{3} \rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3}$

$\therefore \int e^{3x} x^2 dx = \frac{e^{3x}}{3} x^2 - \boxed{\frac{2}{3} \int x e^{3x} dx}$

let $u = x \rightarrow du = dx$

let $\int dv = \int e^{3x} dx * \frac{3}{3} \rightarrow \boxed{v = \frac{e^{3x}}{3}}$

$e^{u} \cdot \frac{du}{dx} =$

$\therefore \int e^{3x} x^2 dx = \frac{e^{3x}}{3} x^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{e^{3x}}{3} x - \int \frac{e^{3x}}{3} dx \right]$

$= \frac{e^{3x}}{3} x^2 - \frac{2}{9} e^{3x} x + \frac{2}{27} e^{3x} + c$